Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 12, pp. 1015–1024. Pergamon Press 1969. Printed in Great Britain

ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR ET DE L'HUMIDITE

M. D. MIKHAILOV

Institut Supérieur de Mécanique Appliquée et d'Electrotechnique (MEI), Sofia, Bulgarie

(*Reçu le* 12 *février* 1969)

Résumé—On présente une solution analytique pour les distributions de température et de concentration de l'humidité dans un corps unidimensionnel (plaque, cylindre où sphère) pour des conditions aux limites généralisées.

NOTATIONS

ξ, coordonée sans dimensions;

Fo, nombre de Fourier;

$\theta_1(\xi, Fo)$, température relative du corps de coordonnée ξ à l'instant Fo;

$\theta_2(\xi, Fo)$, concentration de l'humidité relative du corps de coordonnée ξ à l'instant Fo;

Γ, facteur de forme respectivement égal à 0, 1 et 2 pour la plaque, le cylindre et la sphère;

Ko^*, nombre modifié de Kossovitch;

Lu, nombre de Luikov;

Pn, nombre de Posnov;

K_{km}, constantes connues;

$\varphi_k(Fo)$, fonctions connues, bornées et intégrables;

$\phi_\Gamma(x)$, $V_\Gamma(x)$, fonctions définies dans l'Appendice;

$\bar{\theta}_k(\xi, s) = \int\limits_0^\infty \theta(\xi, Fo)\, e^{-sFo}\, dFo$, transformée de Laplace.

1. INTRODUCTION

Un système d'équations aux dérivées partielles pour les distributions de température et de concentration de l'humidité transitoires dans un corps poreux et capillaire est donné par Luikov [1, 2]. Les solutions de ce système pour différentes conditions à la limite sont exposées dans [3].

Dans le présent article, nous exposerons une solution générale du problème posé.

Comme nous l'avons déjà indiqué en [4], les modèles mathématiques pour la propagation de la chaleur et de l'humidité données par Luikov [1, 2] et par Krischer [5, 6] sont pratiquement équivalents. La solution que nous proposons est donc applicable pour les deux cas.

Considérons les équations de Luikov [3]

$$\frac{\partial\theta_1(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\theta_1(\xi, Fo)}{\partial\xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial\theta_1(\xi, Fo)}{\partial\xi} - Ko^*\frac{\partial\theta_2(\xi, Fo)}{\partial Fo} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta_2(\xi, Fo)}{\partial Fo} = Lu\left[\frac{\partial^2\theta_2(\xi, Fo)}{\partial\xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial\theta_2(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right] - LuPn\left[\frac{\partial^2\theta_1(\xi, Fo)}{\partial\xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial\theta_1(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right]. \tag{2}$$

Au moment initial les distributions de la température relative et de la concentration relative de l'humidité sont données par les conditions

$$\theta_k(\xi, 0) = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{3}$$

En raison de la symétrie on a :

$$\frac{\partial \theta_k(0, Fo)}{\partial \xi} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{4}$$

Les conditions aux limites du corps peuvent être généralisées comme suit :

$$K_{k1}\theta_1(1, Fo) + K_{k2}\theta_2(1, Fo) + K_{k3}\frac{\partial \theta_1(1, Fo)}{\partial \xi} + K_{k4}\frac{\partial \theta_2(1, Fo)}{\partial \xi} = \varphi_k(Fo) \qquad (k = 1, 2) \tag{5}$$

où $K_{km}(k = 1, 2; m = 1, 2, 3, 4)$ sont des constantes données et $\varphi_k(Fo)$ sont des fonctions connues, bornées et intégrables. Les conditions à la limite présentées en [3] peuvent être trouvées facilement à partir de (5).

Le problème à résoudre est : Trouver les fonctions $\theta_1(\xi, Fo)$ et $\theta_2(\xi, Fo)$ satisfaisant aux équations de Luikov (1) et (2) et aux conditions (3)–(5).

2. SOLUTION DU PROBLÈME

En admettant que $\theta_k(\xi, Fo)$ sont les distributions de la température relative et de la concentration relative de l'humidité, des valeurs nulles à l'instant initial, les équations (1) et (2) devient en transformées de Laplace

$$s\bar{\theta}_1(\xi, s) = \bar{\theta}_1''(\xi, s) + \frac{\Gamma}{\xi}\bar{\theta}_1'(\xi, s) - sKo^*\bar{\theta}_2(\xi, s) \tag{6}$$

$$s\bar{\theta}_2(\xi, s) = Lu\left[\bar{\theta}_2''(\xi, s) + \frac{\Gamma}{\xi}\bar{\theta}_2'(\xi, s)\right] - LuPn\left[\bar{\theta}_1''(\xi, s) + \frac{\Gamma}{\xi}\bar{\theta}_1'(\xi, s)\right]. \tag{7}$$

Nous essaierons de satisfaire le système (6)–(7) par l'expression

$$\bar{\theta}_1(\xi, s) = \sum_{i=1}^{2} C_1\phi_\Gamma[v_i i(\sqrt{s})\,\xi] \tag{8}$$

où v_i et C_i sont des constantes inconnues.

Certaines propriétés de la fonction $\phi_\Gamma(x)$ sont indiquées dans l'Appendice.

En portant l'expression (8) dans (6) on trouve

$$\bar{\theta}_2(\xi, s) = \frac{1}{Ko^*}\sum_{i=1}^{2} C_i(v_i^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_i i(\sqrt{s})\,\xi] \tag{9}$$

d'où on obtient, en utilisant (7),

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\phi_\Gamma[v_i i(\sqrt{s})\,\xi]\left\{v_i^4 - \left(1 + Ko^*Pn + \frac{1}{Lu}\right)v_i^2 + \frac{1}{Lu}\right\} = 0. \tag{10}$$

La condition (10) est remplie si

$$v_i^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(1 + Ko^*Pn + \frac{1}{Lu}\right) + (-1)^i\sqrt{\left[\left(1 + Ko^*Pn + \frac{1}{Lu}\right)^2 - \frac{4}{Lu}\right]}\right\} \qquad (i = 1, 2). \tag{11}$$

Un tableau des valeurs de v_1 et v_2 en fonction de Ko^*Pn et Lu est donné dans la référence [3].

Les équations (4) et (5) deviennent, en transformées de Laplace,

$$\bar{\theta}'_k(0, s) = 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{12}$$

$$K_{k1}\theta_1(1, s) + K_{k2}\bar{\theta}_2(1, s) + K_{k3}\bar{\theta}'_1(1, s) + K_{k4}\bar{\theta}'_2(1, s) = \bar{\varphi}_k(s). \tag{13}$$

La condition (12) est automatiquemant remplie.

En posant $\xi = 1$ dans (8) et (9) et leurs dérivées et en portant les expressions trouvées dans (13) on a :

$$\sum_{i=1}^{2} C_i\bar{Q}_{ki}(s) = \bar{\varphi}_k(s) \qquad (k = 1, 2) \tag{14}$$

où

$$\bar{Q}_{ki}(s) = \left(K_{k1} + \frac{v_i^2 - 1}{Ko^*}K_{k2}\right)\phi_\Gamma(v_i i\sqrt{s}) - \left(K_{k3} + \frac{v_i^2 - 1}{Ko^*}K_{k4}\right)v_i i(\sqrt{s})\, V_\Gamma(v_i i\sqrt{s}). \tag{15}$$

Alors après la détermination des constantes C_1 et C_2 de (14) et en portant ces résultats dans (8) et (9), on obtient :

$$\bar{\theta}_1(\xi, s) = \frac{\bar{\varphi}_1(s)}{\Delta(s)}\begin{vmatrix}\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi] & \phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]\\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s)\end{vmatrix} + \frac{\bar{\varphi}_2(s)}{\Delta(s)}\begin{vmatrix}\bar{Q}_{11}(s) & \bar{Q}_{12}(s)\\ \phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi] & \phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]\end{vmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} Ko^*\bar{\theta}_2(\xi, s) &= \frac{\bar{\varphi}_1(s)}{\Delta(s)}\begin{vmatrix}(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi] & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]\\ \bar{Q}_{21}(s) & \bar{Q}_{22}(s)\end{vmatrix}\\ &\quad + \frac{\varphi_2(s)}{\Delta(s)}\begin{vmatrix}\bar{Q}_{11}(s) & \bar{Q}_{12}(s)\\ (v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi] & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

où

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix}\bar{Q}_{11}(s) & \bar{Q}_{12}(s)\\ \bar{Q}_{21}(s) & \bar{Q}_{22}(s)\end{vmatrix} \tag{18}$$

On déduit par inversion les distributions de la température relative et de la concentration relative de l'humidité

$$Q_1(\xi, Fo) = \varphi_1(0)\left\{B_{11} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix}\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\\ Q_{21}(\mu_n) & Q_{22}(\mu_n)\end{vmatrix}\exp(-\mu_n^2 Fo)\right\}$$

$$+ B_{11}\int_0^{Fo}\varphi'_1(Fo - Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix}\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\\ Q_{21}(\mu_n) & Q_{22}(\mu_n)\end{vmatrix}\int_0^{Fo}\varphi'_1(Fo - Fo^*)$$

$$+ \exp(-\mu_n^2 Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* + \varphi_2(0)\left\{B_{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix} Q_{11}(\mu_n) & Q_{12}(\mu_n) \\ \phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\end{vmatrix}\exp(-\mu_n^2 Fo)\right\}$$

$$+ B_{12}\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo - Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix} Q_{11}(\mu_n) & Q_{12}(\mu_n) \\ \phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\end{vmatrix}$$

$$\times\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo - Fo^*)\exp(-\mu_n^2 Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* \tag{19}$$

$$\theta_2(\xi, Fo) = \varphi_1(0)\left\{B_{21} - \frac{1}{Ko^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix}(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi) \\ Q_{21}(\mu_n) & Q_{22}(\mu_n)\end{vmatrix}\exp(-\mu_n^2 Fo)\right\}$$

$$+ B_{21}\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo - Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* - \frac{1}{Ko^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix}(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi) \\ Q_{21}(\mu_n) & Q_{22}(\mu_n)\end{vmatrix}.$$

$$\times\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo - Fo^*)\exp(-\mu_n^2 Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* + \varphi_2(0)\left\{B_{22} - \frac{1}{Ko^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\right.$$

$$\left.\times\begin{vmatrix} Q_{11}(\mu_n) & Q_{12}(\mu_n) \\ (v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\end{vmatrix}\exp(-\mu_n^2 Fo)\right\} + B_{22}\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo - Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^*$$

$$-\frac{1}{Ko^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\psi_n}\begin{vmatrix} Q_{11}(\mu_n) & Q_{12}(\mu_n) \\ (v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_1\mu_n\xi) & (v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n\xi)\end{vmatrix}\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo - Fo^*)\exp(-\mu_n^2 Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^* \tag{20}$$

où

$$Q_{ki}(\mu_n) = \left\{K_{k1} + \frac{v_i^2 - 1}{Ko^*}K_{k2}\right\}\phi_\Gamma(v_i\mu_n) - \left\{K_{k3} + \frac{v_i^2 - 1}{Ko^*}K_{k4}\right\}v_i\mu_n V_\Gamma(v_i\mu_n) \tag{21}$$

$$B_{11} = \frac{K_{22}}{\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{vmatrix}},\qquad B_{12} = \frac{-K_{12}}{\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{vmatrix}},\qquad B_{21} = \frac{-K_{21}}{\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{vmatrix}},\qquad B_{22} = \frac{K_{11}}{\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{vmatrix}} \tag{22}$$

$$\psi_n = \frac{v_2^2 - v_1^2}{Ko^*}\left[\left\{\begin{vmatrix}Ko^*K_{11} - K_{12} & K_{13}\\ Ko^*K_{21} - K_{22} & K_{23}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\left(Ko^*Pn + \frac{1}{Lu}\right)K_{11} - PnK_{12} & K_{14}\\ \left(Ko^*Pn + \frac{1}{Lu}\right)K_{21} - PnK_{22} & K_{24}\end{vmatrix}\right.\right.$$

$$+ \frac{1-\Gamma}{\mu_n^2}\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}\Bigg\}\phi_\Gamma(v_1\mu_n)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n) + \frac{\mu_n^2}{Lu}\begin{vmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \phi_\Gamma(v_1\mu_n) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n) \\ \dfrac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n} & -\dfrac{V_\Gamma(v_2\mu_n)}{v_2\mu_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \phi_\Gamma(v_1\mu_n) & -\phi_\Gamma(v_2\mu_n) \\ v_1^2\dfrac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n} & v_2^2\dfrac{V_\Gamma(v_2\mu_n)}{v_2\mu_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\mu_n^2}{Lu}\left\{\begin{vmatrix} K_{12} + (1-\Gamma)K_{14} & K_{13} \\ K_{22} + (1-\Gamma)K_{24} & K_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix}\right\}\frac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n}\frac{V_\Gamma(v_2\mu_n)}{v_2\mu_n} \tag{23}$$

μ_n sont les racines de l'équation

$$(v_1^2 - v_2^2)\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}\phi_\Gamma(v_1\mu_n)\,\phi_\Gamma(v_2\mu_n) + (v_1^2 - v_2^2)\frac{\mu_n^4}{Lu}\begin{vmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{vmatrix}\frac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n}\;\frac{V_\Gamma(u_2\mu_n)}{v_2\mu_n}$$

$$+ \frac{\mu_n^2}{Lu}\begin{vmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{22} & K_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \phi_\Gamma(v_1\mu_n) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n) \\ \dfrac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n} & \dfrac{V_\Gamma(v_2\mu_n)}{v_2\mu_n} \end{vmatrix} + \mu_n^2\begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \phi_\Gamma(v_1\mu_n) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n) \\ v_1^4\dfrac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n} & v_2^4\dfrac{V_\Gamma(v_2\mu_n)}{v_2\mu_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \mu_n^2\left\{\begin{vmatrix} Ko^*K_{11} - K_{12} & K_{13} \\ Ko^*K_{21} - K_{22} & K_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K_{11} + PnK_{12} & K_{14} \\ K_{21} + PnK_{22} & K_{24} \end{vmatrix}\right\}\begin{vmatrix} \phi_\Gamma(v_1\mu_n) & \phi_\Gamma(v_2\mu_n) \\ v_1^2\dfrac{V_\Gamma(v_1\mu_n)}{v_1\mu_n} & v_2^2\dfrac{V_\Gamma(v_2\mu_n}{v_2\mu_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Si nous avons la condition:

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

les équations (22) donnant B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} s'écriront

$$B_{11} = P\left[K_{22}Fo + \frac{1}{2(\Gamma+1)}\left\{\xi^2\begin{vmatrix} 1 & Ko^* \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Ko^*Pn + (1/Lu) & -Ko^* \\ K_{21} + 2K_{23} & K_{22} + 2K_{24} \end{vmatrix}\right\} - K_{22}QP\right] \tag{26}$$

$$B_{12} = P\left[-K_{12}Fo + \frac{1}{2(\Gamma+1)}\left\{\xi^2\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 1 & Ko^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} + 2K_{13} & K_{12} + 2K_{14} \\ Ko^*Pn + (1/Lu) & -Ko^* \end{vmatrix}\right\} + K_{12}QP\right] \tag{27}$$

$$B_{21} = P\left[-K_{21}Fo + \frac{1}{2(\Gamma+1)}\left\{\xi^2\begin{vmatrix} Pn & Ko^*Pn + (1/Lu) \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Pn & 1 \\ K_{21} + 2K_{23} & K_{22} + 2K_{24} \end{vmatrix}\right\} + K_{21}QP\right] \tag{28}$$

$$B_{22} = P\left[K_{11}Fo + \frac{1}{2(\Gamma+1)}\left\{\xi^2\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ Pn & Ko^*Pn + (1/Lu) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} + 2K_{13} & K_{12} + 2K_{14} \\ -Pn & 1 \end{vmatrix}\right\} - K_{11}QP\right] \tag{29}$$

où

$$P = \frac{\Gamma + 1}{\begin{vmatrix} Ko^*K_{11} - K_{12} & K_{13} + PnK_{14} \\ Ko^*K_{21} - K_{22} & K_{23} + PnK_{24} \end{vmatrix} + \frac{1}{Lu}\begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix}} \tag{30}$$

$$Q = \frac{1}{2(\Gamma + 1)}\left[\frac{1}{Lu(\Gamma + 1)}\left\{\begin{vmatrix} K_{11} + K_{13} & K_{14} \\ K_{21} + K_{23} & K_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{13} & K_{12} + K_{14} \\ K_{23} & K_{22} + K_{24} \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{Lu(\Gamma + 1)}\left\{\begin{vmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{22} & K_{23} \end{vmatrix}\right.\right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix}\right\} + \frac{1 + Ko^*Pn + (1/Lu)}{\Gamma + 3}\left\{\begin{vmatrix} Ko^*K_{11} - K_{12} & K_{13} \\ Ko^*K_{21} - K_{22} & K_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K_{11} + PnK_{12} & K_{14} \\ K_{21} + PnK_{22} & K_{24} \end{vmatrix}\right\}$$

$$\left. + \frac{[1 + Ko^*Pn + (1/Lu)]^2}{\Gamma + 3}\begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix}\right] \tag{31}$$

Le solution trouvée ci-dessus n'a pas de sens lorsque:

$$\begin{vmatrix} Ko^*K_{11} - K_{12} & K_{13} + PnK_{14} \\ Ko^*K_{21} - K_{22} & K_{23} + PnK_{24} \end{vmatrix} + \frac{1}{Lu}\begin{vmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{21} & K_{24} \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

Si $K_{11} = K_{12} = K_{21} = K_{22} = 0$, c'est-à dire si les conditions (25) et (32) sont remplies, les expressions (16) et (17) prennent la forme

$$\bar{\theta}_1(\xi, s) = \frac{1}{(v_1^2 - v_2^2)\begin{matrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{matrix}}\left\{\bar{\varphi}_1(s)\begin{vmatrix} \dfrac{\phi_r[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_1 i(\sqrt{s})\,V_r[v_1 i\sqrt{s}]} & \dfrac{\phi_r[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_2 i(\sqrt{s})\,V_r[v_2 i\sqrt{s}]} \\ Ko^*K_{23} + (v_1^2 - 1)\,K_{24} & Ko^*K_{23} + (v_2^2 - 1)\,K_{24} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \bar{\varphi}_2(s)\begin{vmatrix} Ko^*K_{13} + (v_1^2 - 1)\,K_{14} & Ko^*K_{13} + (v_2^2 - 1)\,K_{14} \\ \dfrac{\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_1 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_1 i\sqrt{s}]} & \dfrac{\phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_2 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_2 i\sqrt{s}]} \end{vmatrix}\right\} \tag{33}$$

$$Ko^*\bar{\theta}_2(\xi, s) = \frac{1}{(v_1^2 - v_2^2\begin{vmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{vmatrix}}\left\{\bar{\varphi}_1(s)\begin{vmatrix} \dfrac{(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\xi]}{v_1 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_1 i\sqrt{s}]} & \dfrac{(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_2 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_2 i\sqrt{s}]} \\ Ko^*K_{23} + (v_1^2 - 1)\,K_{24} & Ko^*K_{23} + (v_2^2 - 1)\,K_{24} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \bar{\varphi}_2(s)\begin{vmatrix} Ko^*K_{13} + (v_1^2 - 1)\,K_{14} & K_0^*K_{13} + (v_2^2 - 1)\,K_{14} \\ \dfrac{(v_1^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_1 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_1 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_1 i\sqrt{s}]} & \dfrac{(v_2^2 - 1)\,\phi_\Gamma[v_2 i(\sqrt{s})\,\xi]}{v_2 i(\sqrt{s})\,V_\Gamma[v_2 i\sqrt{s}]} \end{vmatrix}\right\} \tag{34}$$

On obtient par inversion l'expression des distributions de la température relative et de la concentration relative de l'humidité

$$\theta_1(\xi, Fo) = \frac{1}{\begin{vmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{vmatrix}}\left[\varphi_1(0)\left\{(\Gamma + 1)\,LuFo\left[Ko^*K_{23} + \left(K\acute{o}^*Pn + \frac{1}{Lu}\right)K_{24}\right]\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{24}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{2i}^{1}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}\exp[-\mu_n^2 Luv_i^2 Fo]\Bigg\}+(\Gamma+1)\,Lu\,\Bigg[Ko^*K_{23}$$

$$+\left(Ko^*Pn+\frac{1}{Lu}\right)K_{24}\Bigg]\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo-Fo^*)\,Fo^*\,\mathrm{d}Fo^*-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{24}$$

$$\times\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo-Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^*-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{2i}^{1}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}\int_0^{Fo}\exp[-\mu_n^2 Luv_i^2 Fo^*]\,\varphi_1'(Fo-Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^*$$

$$-\varphi_2(0)\Bigg\{(\Gamma+1)\,LuFo\left[Ko^*K_{13}+\left(Ko^*Pn+\frac{1}{Lu}\right)K_{14}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{14}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{1i}^{1}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}\exp[-\mu_n^2 Luv_i^2 Fo]\Bigg\}-(\Gamma+1)\,Lu\left[Ko^*K_{13}+\left(Ko^*Pn+\frac{1}{Lu}\right)K_{14}\right]$$

$$+\int_0^{Fo}\varphi_2^1(Fo-Fo^*)\,Fo^*\,\mathrm{d}Fo^*+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{14}\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo-Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^*$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{1i}^{1}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}\int_0^{Fo}\varphi_2'(Fo-Fo^*)\exp[-\mu_n^2 Luv_i^2 Fo^*]\,\mathrm{d}Fo^* \qquad (35)$$

$$\theta_2(\xi,Fo)=\frac{1}{\begin{vmatrix}K_{13} & K_{14}\\ K_{23} & K_{24}\end{vmatrix}}\Bigg[\Bigg[-\varphi_1(0)\Bigg\{(\Gamma+1)\,LuFo[K_{23}+PnK_{24}]-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{23}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{2i}^{2}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}.\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{v_i^2}Fo\right)\Bigg\}-(\Gamma+1)\,Lu(K_{23}+PnK_{24})$$

$$\times\int_0^{Fo}\varphi_1^1(Fo-Fo^*)\,Fo^*\,\mathrm{d}Fo^*+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{23}\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo-Fo^*)\,\mathrm{d}Fo^*$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{2i}^{2}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}\int_0^{Fo}\varphi_1'(Fo-Fo^*)\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{v_i^2}Fo^*\right)\mathrm{d}Fo^*$$

$$+\varphi_2(0)\Bigg\{(\Gamma+1)\,LuFo(K_{13}+PnK_{14})-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma+3}-\xi^2\right)K_{13}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}S_{1i}^{2}\frac{2\phi_\Gamma(\mu_n\xi)}{\mu_n^2\phi_\Gamma(\mu_n)}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{v_i^2}Fo\right)\Bigg\} + (\Gamma + 1)\, Lu(K_{13} + PnK_{14}) \int_0^{Fo} \varphi_2^1(Fo - Fo^*) \, . \, Fo^* \, \mathrm{d}Fo^*$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma + 1}{\Gamma + 3} - \xi^2\right) K_{13} \int_0^{Fo} \varphi_2^1(Fo - Fo^*) \, \mathrm{d}Fo^* - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} S_{1i}^2 \frac{2\phi_\Gamma(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 \phi_\Gamma(\mu_n)}$$

$$\times \int_0^{Fo} \varphi_2^1(Fo - Fo^*) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{v_i^2} Fo^*\right) \mathrm{d}Fo^* \Bigg]\Bigg] \quad (36)$$

où

$$S_{ki}^1 = \frac{(-1)^{i+1}}{v_1^2 - v_2^2}\{Ko^* K_{k3} + (v_i^2 - 1)\, K_{k4}\} \quad (k = 1, 2) \quad (37)$$

$$S_{ki}^2 = \frac{(-1)^{i}}{v_1^2 - v_2^2}\{(v_i^2 - 1)\, K_{k3} - PnK_{k4}\} \quad (k = 1, 2) \quad (38)$$

et où μ_n sont les racines de l'équation

$$V_\Gamma(\mu_n) = 0 \quad (39)$$

3. CONCLUSION

Comparant les conditions à la limite généralisées (5) avec les conditions étudiées en [3] on peut facilement déterminer K_{km} et obtenir immédiatement les solutions recherchées. Si $Ko^* = 0$, où bien $ln = 0$, en passant à la limite conformément à [3] on obtient tous les cas classiques de la théorie de la conduction de la chaleur.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. Luikov, *Experimentalle und theoretische Grundlagen der Trocknung*, VEB Verlag Technik Berlin (1955).
2. A. V. Luikov, *Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies*, Pergamon Press (1966).
3. A. V. Luikov and Yu. A. Mikhailov, *Theory of Energy and Mass Transfer*, Pergamon Press (1965).
4. Zw. M. Iwantschewa et M. D. Michailov, Über Differentialgleichungen für Wärme- und Stoffaustausch von hygroskopischen Stoffen. *Wärme- und Stoffübertragung*, **1**, 117–120, 1968.
5. O. Krischer, Der Wärme- und Stoffaustausch mit Trocknungsgut, *Ver. Dt. Ing. Forsch.* 415, July/August, 1942.
6. O. Krischer, *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*, Springer, Berlin (1956).
7. M. D. Mikhailov, Heat and Mass transfer in medium with variable potentials, *Int. J. Heat Mass Transfer* **9**, 695–698 (1966).

APPENDIX

Dans [7], on a introduit les fonctions suivantes:

$$\phi_\Gamma(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\Gamma + 1)} + \frac{x^4}{2\,.\,4(\Gamma + 1)(\Gamma + 3)} - \frac{x^6}{2\,.\,4\,.\,6(\Gamma + 1)(\Gamma + 3)(\Gamma + 5)} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!\,(\Gamma + 2n - 1)!!} \quad (1)$$

$$V_\Gamma(x) = \frac{x}{\Gamma + 1} - \frac{x^3}{2(\Gamma + 1)(\Gamma + 3)} + \frac{x^5}{2.4(\Gamma + 1)(\Gamma + 3)(\Gamma + 5)} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+)^n\, x^{2n+1}}{(2n)!!\,(\Gamma + 2n + 1)!!}. \tag{2}$$

Le grand avantage de ces fonctions est précisément qu'elles permettent de résoudre en même temps les problèmes de la plaque ($\Gamma = 0$), du cylindre ($\Gamma = 1$) et de la sphère ($\Gamma = 2$). Pour $\Gamma = 0$, et 2 nous obtenons les series de fonctions généralement adoptées, qui définissent les fonctions trigonométriques et celles de Bessel:

$$\phi_0(x) = \cos x; \qquad V_0(x) = \sin x; \qquad \phi_1(x) = \mathcal{J}_0(x); \qquad V_1(x) = \mathcal{J}_1(x);$$

$$\phi_2(x) = \frac{\sin x}{x}; \qquad V_2(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \tag{3}$$

Nous voyons que:

$$\frac{\mathrm{d}\phi_\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = -\, V_\Gamma(x). \tag{4}$$

Admettons qu'il existe la formule:

$$\frac{\mathrm{d}V_\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = \phi_\Gamma(x) + \frac{b}{x} V_\Gamma(x) \tag{5}$$

où b est une constante qui n'est pas encore définie. Pour la définir, nous portons dans (5) les séries (1) et (2). Après l'égalisation des coefficients nous obtenons $b = -\Gamma$ et la formule (5) prend son aspect définitif

$$\frac{\mathrm{d}V_\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} = \phi_\Gamma(x) - \frac{\Gamma}{x} V_\Gamma(x). \tag{6}$$

A l'aide de (6), nous obtenons facilement les formules suivantes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xV_\Gamma(x)] = x\phi_\Gamma(x) + (1 - \Gamma)\, V_\Gamma(x) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\Gamma V_\Gamma(x)] = x^\Gamma \phi_\Gamma(x) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{V_\Gamma(x)}{x}\right] = \frac{x\phi_\Gamma(x) - (\Gamma + 1)\, V_\Gamma(x)}{x^2}. \tag{9}$$

Abstract—An analytical solution for temperature and humidity concentration distributions in an unidimensional body (plate, cylinder or sphere) is presented for generalized boundary conditions.

Zusammenfassung—Für die Temperatur- und Feuchtigkeitsverteilung in einem eindimensionalen körper (Platte, Zylinder oder Kugel) wird eine Lösung für verallgemeinerte Randbedingungen angegeben.

Аннотация—Представлено аналитическое решение распределения температуры, влажности и концентрации в одномерном теле (пластина, цилиндр или сфера) при обобщенных граничных условиях.